SEDUC OLÍMPICA

TME²

2º TORNEIO DE MATEMÁTICA
DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

1ª Fase
Ensino Médio

GABARITO OFICIAL E RESOLUÇÃO COMENTADA

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ
AQUI TEM TRABALHO. AQUI TEM FUTURO.

Problema 01 (E)

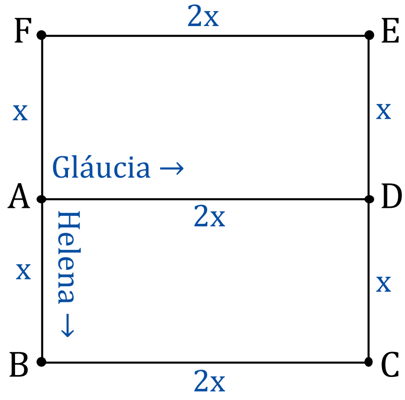
É fácil perceber que $2x + 6 = 2(x + 3) = 2 \cdot 11 = 22$.

Problema 02 (A)

É fácil perceber que a medida do lado do quadrado ABCD é igual à soma das medidas do lado do quadrado branco com os lados congruentes dos 2 triângulos isósceles, todos iguais a 2 cm. Logo o lado do quadrado ABCD mede $3 \cdot 2\ cm = 6\ cm$ e á área do quadrado ABCD é dada por $(6\ cm)^2 = 36\ cm^2$.

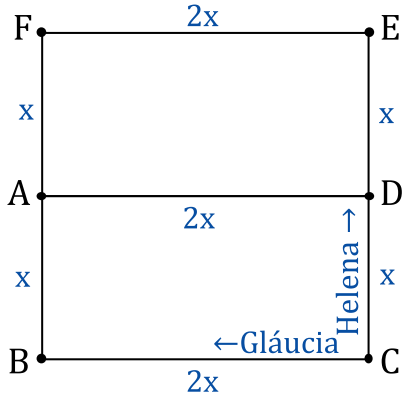
Problema 03 (E)

Consideremos 2x como medida para o lado do quadrado, assim temos:



Pelo enunciado Helena e Gláucia partem juntas do ponto A pela primeira vez seguindo percursos distintos na trilha quadrada.

Observe que Helena segue o caminho ABCDEFA, percorrendo uma distância 8x a cada ciclo, enquanto Gláucia segue o caminho ADCBA, percorrendo uma distância de 6x a cada ciclo. O primeiro encontro de Gláucia e Helena ocorre, após ambas percorrerem uma distância de 3x, o que acontece no vértice C.



Partindo do vértice, ao percorrerem uma distância de 6x, Helena estará no vértice B e Gláucia novamente no vértice C, sem que haja encontro neste percurso.

Portanto, ao percorrem uma distância de x, Helena e Gláucia se encontram pela segunda vez no ponto médio de BC.

Problema 04 (B)

1,5 L de refrigerante é o mesmo que 3/2 de litro. Assim, havia $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ de litro de refrigerante na garrafa.

Uma outra forma de resolver sugere achar metade de 3/2, ou seja, $\frac{3}{2} \div 2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Problema 05 (A)

Ao longo do contorno do numeral 2, contam-se 24 lados de quadradinhos da malha. Se o perímetro desse numeral é igual a 12 cm, a medida do lado de um quadradinho da malha mede $\frac{1}{2}$ cm. Isto é, cada 2 lados de quadradinho equivalem a 1 cm.

As letras T, M e E se apresentam com 32, 72 e 48 lados de quadradinhos no contorno, ou seja, 16 cm, 36 cm e 24 cm de perímetro cada. A soma dos perímetros das três figuras equivale T, M e E é igual a $16 + 36 + 24 = 76$ cm.

Problema 06 (SEM RESPOSTA)

Temos que $3^2 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$.

Item A não é solução, pois $2(3 + \sqrt{3}) + 2(3 - \sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} = 12$.

Item B não é solução, pois $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$.

Item C não é solução, pois $\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$.

Item D não é solução, pois não existe o triângulo com as dimensões citadas.

Item E não é solução, pois o cateto mede $\sqrt{6}$.

ATENÇÃO: A questão está anulada e cada participante receberá a sua pontuação.

Problema 07 (A)

Ora, dada a expressão $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ e as condições $a^2 + b^2 = 1$ e $ab = \frac{1}{2}$, teremos que $a^4 + b^4 = 1^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Problema 08 (B)

A primeira regra estabelece que quem prefere romances não gosta de livros de mistério, o que significa que Laura, preferindo romances, não gosta de mistérios. No entanto, a regra não exclui a possibilidade de ela gostar ou não de poesia, pois só diz que quem gosta de poesia também gosta de romances, não o contrário.

A segunda regra indica que aqueles que gostam de poesia sempre apreciam romances, mas isso não se aplica inversamente; portanto, não podemos afirmar automaticamente que Laura gosta de poesia, apenas porque ela gosta de romances.

Como João detesta poesia, e sabemos que quem gosta de poesia gosta de romances, isso não nos diz diretamente sobre suas preferências por romances ou mistérios. Sua aversão à poesia não influencia diretamente sua opinião sobre romances ou mistérios, dadas as regras apresentadas.

Ninguém no clube gosta dos três gêneros, o que é consistente com as preferências deduzidas, mas não afeta diretamente a resposta à questão específica sobre Laura e João.

Problema 09 (C)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(x+5)^2 + x^2 = 25^2 \Rightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 300 = 0 \Rightarrow x = -20 \text{ ou } x = 15.$$

Como x não pode ser negativo, descartamos -20 e novamente pelo Teorema de Pitágoras, agora no triângulo ABD, podemos calcular o valor da medida do lado AD:

$$(AD)^2 = (15+5)^2 + (15 + (15-9))^2 \Rightarrow (AD)^2 = 400 + 441 \Rightarrow AD = \sqrt{841} \Rightarrow AD = 29\ cm.$$

Problema 10 (D)

Para resolver essa questão, temos que pensar na pior das situações onde os 10 primeiros alunos retiram 10 bolinhas com números diferentes e os próximos 10 alunos retiram também 10 bolinhas com números diferentes. Assim teremos 10 duplas de alunos com números iguais, totalizando 20 alunos. É garantido que o próximo aluno a retirar uma bolinha fará um trio com uma das duplas. Assim, a quantidade mínima de alunos para realizar essa dinâmica deve ser 21 alunos.

Problema 11 (C)

Vamos analisar as possibilidades a partir da pintura da mesorregião localizada na parte de baixo do mapa até a mesorregião de cima, classificando-as como A, B, C e D, respectivamente. Os alunos podem pintar a mesorregião A com qualquer uma das quatro cores possíveis. Feito isso, podem pintar a mesorregião B com qualquer uma das três cores restantes. Como a mesorregião C faz divisa com as mesorregiões A e B, podem pintá-la com apenas duas cores diferentes (não pode ter as mesmas cores de A e B). Por fim, podem pintar a mesorregião D com três das quatro cores disponíveis (não pode ter a mesma cor de C, pois faz divisa com a mesma). Portanto, pelo PFC, os alunos podem pintar o mapa de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ maneiras diferentes.

Problema 12 (B)

Como os dois segmentos de reta são paralelos, temos pelo Teorema de Tales a seguinte proporção:

$$\frac{x}{1} = \frac{E-x}{y-1} \Leftrightarrow E - x = xy - x$$

Portanto,

$$E = xy.$$

Problema 13 (C)

Como n é par, então tomemos $n = 2k_1$, com $k_1 \in \mathbb{N}$. Como m é ímpar, então tomemos $m = 2k_2 + 1$, com $k_2 \in \mathbb{N}$.

Para I temos $3(2k_1) + 2k_2 + 1 = 6k_1 + 2k_2 + 1 = 2(3k_1 + k_2) + 1 = 2k_3 + 1$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo I é ímpar.

Para II temos $(2k_1)^2 + (2k_2+1)^2 = 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 = 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_2) + 1 = 2k_3 + 1$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo I é ímpar.

Para III temos $(2k_1)^2 + 2(2k_2+1) = \ 4k_1^2 + 4k_2 + 2 = 2(2k_1^2 + 2k_2 + 1) = 2k_3$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo III é par.

Para IV temos $(2k_2+1)^2 + 2(2k_1) = 4k_2^2 + 4k_2 + 1 + 4k_1 = 2(2k_2^2 + 2k_2 + 2k_1) + 1 = 2k_3 + 1$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo I é ímpar.

Portanto apenas III representa um número par.

Problema 14 (D)

Definimos a velocidade média (Vm) de um objeto como da razão entre a distância percorrida (d) e o tempo gasto (t). Neste caso, $t = \frac{d}{Vm}$ e $d = Vm \cdot t$.

No problema,

$d = 90 + 90 = 180$ e $t = \frac{90}{30} + \frac{90}{45} = 5$. Logo, $Vm = \frac{180}{5} = 36\ km/h$.

Problema 15 (D)

Para que os lados x, y e 3 formem um triângulo, eles devem satisfazer as seguintes desigualdades triangulares:

$x + y > 3$, $x + 3 > y$ e $y + 3 > x$.

Isto é equivalente a:

$x + y > 3$ e $|x - y| < 3$.

Os pares que satisfazem essas condições são:

(1,3),

(2,2), (2,3), (2,4),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,4)

(4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,3), (5,4), (5,5), (5,6)

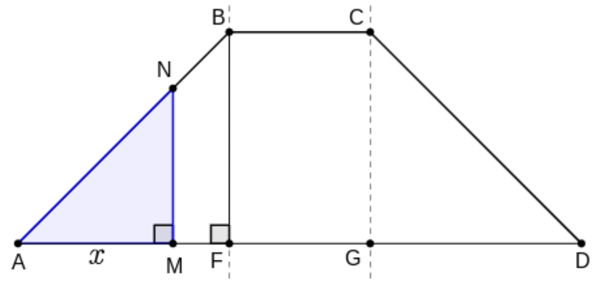
(6,4), (6,5), (6,6).

Portanto, existem 21 combinações possíveis para os pares (x, y).

Problema 16 (B)

Sejam F e G as projeções dos pontos B e C, respectivamente, sobre a base maior AD. Temos três possibilidades a considerar, sobre a localização do ponto M:

1. M pertence ao segmento AF:



Neste caso, o triângulo AMN é retângulo em M e é semelhante ao triângulo AFB pelo caso AA. Assim,

$$\frac{AM}{AF}=\frac{MN}{BF}\Leftrightarrow\frac{x}{AF}=\frac{MN}{BF}\Leftrightarrow MN=\frac{BF\cdot x}{AF}.$$

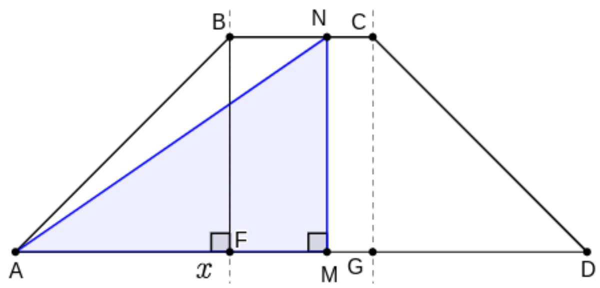
Sendo assim, a área do triângulo AMN, R(x), é dada por:

$$R(x)=\frac{AM\cdot MN}{2}\Leftrightarrow R(x)=\frac{x\cdot\frac{BF\cdot x}{AF}}{2}\Leftrightarrow R(x)=\frac{BF\cdot x^2}{2\cdot AF}.$$

A função $R(x)=\frac{BF\cdot x^2}{2\cdot AF}$ tem seu vértice no ponto (0,0) e concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Como à medida que M percorre o segmento AF no sentido crescente, a altura do triângulo fica cada vez maior, podemos concluir que a área do triângulo AMN, neste intervalo, tem seus valores pertencentes ao ramo crescente da referida função, isto é, ramo crescente de uma parábola de concavidade voltada para cima.

2. M pertence ao segmento FG:

Neste caso, a altura do triângulo AMN permanece constante, pois o ponto N percorre o segmento BC, que é paralelo ao segmento AD. Logo, a área do triângulo AMN é dada por $R(x)=\frac{AM\cdot AN}{2}\Leftrightarrow R(x)=\frac{MN\cdot x}{2}$.

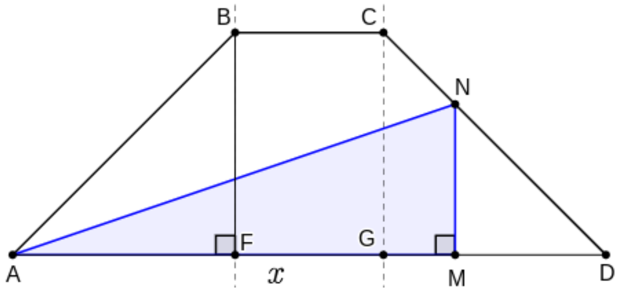


Observe que $R(x)=\frac{MN\cdot x}{2}$ representa uma função afim crescente, pois seu coeficiente angular (coeficiente de x) é positivo.

3. M pertence ao segmento GD:

Neste caso, para determinarmos o valor de MN vamos usar a semelhança, pelo caso AA, entre os triângulos CGD e NMD. Vejamos:

$$\frac{CG}{MN}=\frac{GD}{MD}\Leftrightarrow\frac{CG}{MN}=\frac{GD}{AD-x}\Leftrightarrow MN=\frac{CG\cdot(AD-x)}{GD}.$$



Logo, a área R(x) é dada por:

$$R(x) = \frac{AM \cdot MN}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{x \cdot \frac{CG(AD-x)}{GD}}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{x \cdot CG \cdot (AD-x)}{2GD} \Leftrightarrow R(x) = \frac{AD \cdot CG \cdot x}{2GD} - \frac{CG \cdot x^2}{2GD}.$$

Neste caso, temos uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Note que, conforme M percorre o segmento GD no sentido crescente, a altura do triângulo fica cada vez menor, indicando que a área do triângulo AMN, neste intervalo, tem seus valores pertencentes ao ramo decrescente da referida função, isto é, ramo decrescente de uma parábola de concavidade voltada para baixo.

Conclusão: no primeiro intervalo, temos parte do ramo crescente de uma parábola de concavidade voltada para cima. No segundo intervalo, temos parte do gráfico de uma função crescente e no terceiro intervalo, temos parte do ramo decrescente de uma parábola de concavidade voltada para baixo. Finalmente, o gráfico que melhor representa o gráfico da área do triângulo AMN, no intervalo completo, é o apresentado na alternativa B).

Problema 17 (E)

Ana e Bruno realizam experimentos independentes, onde Ana pode obter 6 possíveis resultados distintos, e Bruno, 8 possíveis resultados. Isso resulta em um total de $6 \times 8 = 48$ combinações diferentes de pares ordenados, em que o primeiro elemento do par representa o resultado de Ana, e o segundo, o resultado de Bruno.

Ana ganha o jogo sempre que obtém resultados iguais a 2, 3, 4, 5 e 6 e Bruno, nessa ordem, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Portanto, Ana ganha em $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ das 48 possibilidades de resultados possíveis. Logo, com probabilidade igual a $\frac{15}{48} = \frac{5}{16}$.

Problema 18 (C)

Tomemos os algarismos a, b, c, d, e, f como indicados na tabela.

a	b	c
d	e	f

Considerando as condições estabelecidas no problema e o valor posicional de cada algarismo, temos:

i) $100a + 10b + c + 100d + 10e + f = 999 \Leftrightarrow 100(a + d) + 10(b + e) + (c + f) = 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9$. Como o valor máximo de $a + d$, $b + e$ e $c + f$, então a única possibilidade é $a + d = 9$, $b + e = 9$ e $c + f = 9$.

ii) $10a + d + 10b + e + 10c + f = 99 \Leftrightarrow 9a + 9b + 9c + (a + d) + (b + e) + (c + f) = 99$

$$\Leftrightarrow 9(a + b + c) + (a + d) + (b + e) + (c + f) = 99.$$

Substituindo i) em ii), temos:

iii) $9(a+b+c)+9+9+9=99 \Leftrightarrow a+b+c=\frac{72}{9} \Leftrightarrow a+b+c=8.$

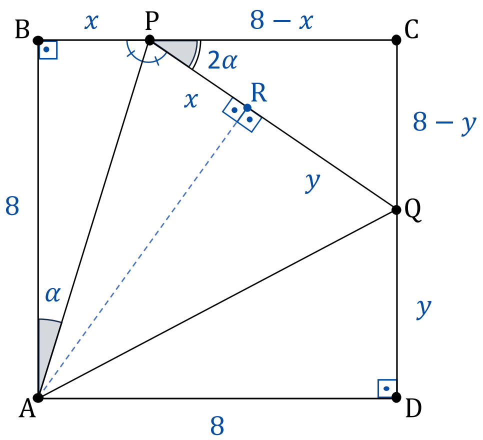
Podemos representar as soluções inteiras não negativas da equação iii) utilizando 8 símbolos ■ para indicar as quantidades e 2 símbolos | para indicar a separação das quantidades correspondentes a cada incógnita. Por exemplo, a sequência ■■■|■■|■■■ representa a solução $a=3, b=2$ e $c=3$, enquanto a sequência ■■■■■|■■■| representa a solução $a=5, b=3$ e $c=0$. Logo, o número de soluções naturais corresponde à quantidade de permutações de 10 elementos em que há 8 repetições do símbolo ■ e 2 repetições do símbolo |, ou seja:

$$P_{10}^{(8,2)}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45.$$

Portanto, existem 45 tabuleiros 2×3 elegantes.

Problema 19 (C)

Observe que: quando traçamos AR perpendicular a PQ, obtemos no triângulo ABP um ângulo P de (90 - α) e, no triângulo APR temos também o ângulo P igual a 90 – α, então temos:



i) ABP ≡ ARP por ALA, e com isso BP = PR = x e PC = 8 – x.

ii) ARQ ≡ ADQ por caso especial ou LLL, e com isso RQ = QD = y e QC = 8 – y.

Daí, o perímetro do triângulo PCQ, será:

$= 8 - x + 8 - y + x + y = 16.$

Problema 20 (D)

Quando inserimos um algarismo não nulo c após o último dígito de X, formamos o número $10X + c$. Por hipótese, c divide $10X + c$, e, portanto, também divide $10X$. Dado que c pode assumir valores de 1 a 9, podemos concluir que a fatoração em primos de 10X deve incluir pelo menos $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$. Considerando que X deve ser o menor possível, temos $10X = 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, isto é, $X = 252$.

Portanto, a soma dos dígitos de X é 9.