SEDUC OLÍMPICA

TME²

2º TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

2ª Fase

Ensino Médio

06 de julho de 2024

GABARITO COMENTADO

APOIO:

FAPEPI

FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DO PIAUÍ

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

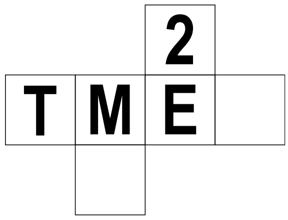
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ

AQUI TEM TRABALHO. AQUI TEM FUTURO.

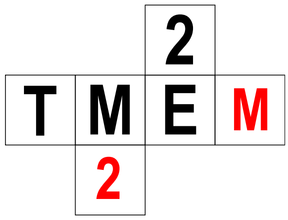
Problema 1

Miguel desenhou um cubo planificado, conforme a figura, para depois montá-lo.



Nesse cubo, Miguel escreveu as letras T, M e E em três faces e o número 2 em outra face.

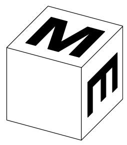
a) Antes de montar o cubo, Miguel completou as duas faces em branco com o mesmo símbolo (número ou letra) da sua face oposta. Complete as faces em branco com os símbolos adequados.



Solução

Após as dobras corretas na planificação e a montagem do cubo, as faces em branco opõem-se às faces M e 2, respectivamente.

b) Desenhe o símbolo que está faltando na face em branco.

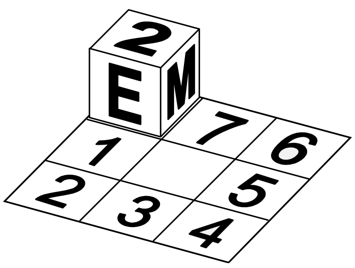


Solução

Veja que as posições das letras M e E no cubo, em que a "perna" direita da letra M se mostra paralela ao maior segmento da letra E, mantendo ambas as letras "em pé", garantem que a terceira face visível do cubo estará ocupada pelo número 2, conforme item (a).

c) Depois de montar o cubo, Miguel apoia-o em uma casa vazia do tabuleiro 3x3, conforme figura abaixo.

Em seguida, rolou o dado sobre uma aresta, sem deslizar, para ocupar a casa 1. Depois, rolou sobre outra aresta para ocupar a casa 2, e assim por diante, rolando e seguindo a sequência numérica até voltar para a casa de onde partiu. No fim, qual símbolo ficou na face de cima do cubo? Quais são os símbolos das duas outras faces visíveis? (justifique)



Solução 1

Observe que, ao mover o cubo até a casa 2, o lado E ficará voltado para a parte de trás. Note também que, ao girar o dado para a direita (de 2 para 4), não alteramos a posição do E, que continua voltado para trás. Assim, na posição 4, o dado se encontra de forma análoga à posição 2, com o E atrás, M no lado esquerdo, 2 na frente e T na frente.

Se na posição 4 os números estão dispostos de forma análoga à posição 2, apenas com as letras e números "invertidos" devido ao movimento de 2 para 4 (veja que em 4 a letra E aponta para a esquerda, enquanto em 2 ela aponta para a direita), então, ao mover o cubo de 4 para 5 e de 5 para 6, isso terá o mesmo efeito de mover o cubo de 2 para 1 e de 1 para a posição inicial. Ou seja, estamos realizando movimentos opostos, desfazendo o que foi feito da posição inicial para 2.

Desse modo, na posição 6, temos os símbolos na mesma posição da inicial (o 2 da posição inicial está para baixo, mas tem seu oposto apontando para cima, e o mesmo ocorre com o M, que na posição 6 estará à direita, mas como ele tem um oposto, haverá outro M à direita), porém de maneira espelhada (o 2 aponta para a direita ao invés de apontar para a esquerda).

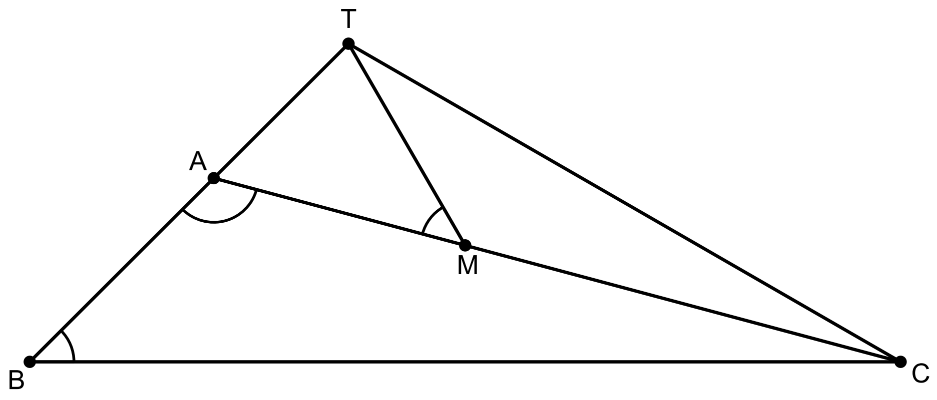
Veja agora que esse espelhamento ocorreu devido ao movimento de 2 para 4. Seguindo a mesma lógica, os movimentos de 6 para 7 e de 7 para a posição inicial são movimentos opostos aos que ocorreram de 2 para 3 e de 3 para 4. Assim, ao realizarmos esses movimentos, desfazemos o que foi feito de 2 para 4.

Solução 2

Os movimentos realizados pelo cubo ao longo das bordas do tabuleiro não afetam a posição inicial do cubo. Isso ocorre porque os movimentos feitos em uma borda do tabuleiro são sempre desfeitos quando o cubo se desloca pela borda oposta. Desse modo, ao final dos movimentos, o cubo retorna à sua posição original, com o E na frente, o M à direita e o número 2 acima.

Problema 2

No triângulo ABC, o ângulo ∠BAC mede 120° e o ângulo $\angle ABC$ mede 45°. Sabe-se que M é um ponto no lado AC do triângulo tal que $AM = AB$. O ponto T está no prolongamento da semirreta $\overrightarrow{BA}$ de modo que o ângulo $\angle TMA$ mede 45°.



a) Qual é a medida do ângulo $\angle ACB$?

Solução:

Sabendo que no triângulo ABC a soma dos ângulos internos é igual a 180°, teremos que ACB $= 180 - (45 + 120) = 15°$.

b) Qual é a medida do ângulo $\angle ATM$?

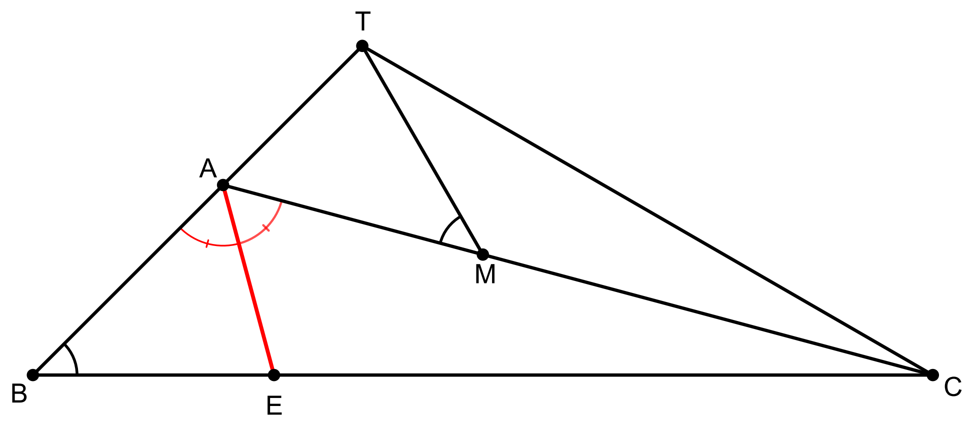
Solução:

O ângulo MAT mede $180 - 120 = 60°$. Logo, $ATM = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

c) Considere um ponto E na interseção da bissetriz do ângulo $\angle BAC$ com o lado BC. Sabendo que o segmento BE mede 4 cm, qual é a medida do segmento TM?

Solução:

Pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), de congruência de triângulos, os triângulos ABE e AMT são congruentes. Com isso, o lado TM, do triângulo AMT, mede 4 cm.

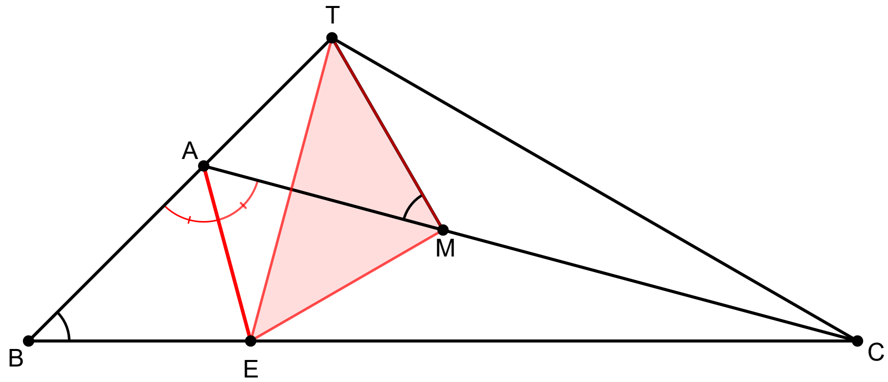


d) Qual é a medida da área do triângulo TME?

Solução:

Note que o triângulo ABE é congruente ao triângulo MAE, pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado-ângulo-lado). Com isso, o ângulo AME do triângulo MAE mede 45°. Temos, portanto, que o ângulo de vértice M do triângulo TME mede 45°+45° = 90°, ou seja, o triângulo TME é retângulo em M.

Pela relação de congruência entre os triângulos ABE e MAE, o lado ME do triângulo TME mede 4 cm. Portanto, a área do triângulo retângulo TME é igual a $\frac{4 \times 4}{2} = 8\ cm^2$.



Problema 3

Dados os algarismos X, Y e Z, consideramos XY como sendo um número de dois algarismos, representado por $XY = 10X + Y$, e XYZ como sendo um número de três algarismos, representado por $XYZ = 100X + 10Y + Z$.

a) Sejam A e B algarismos quaisquer, encontre o maior valor possível para a soma $AB + BA$.

Solução:

Note que o maior valor possível ocorrerá quando A e B forem os maiores valores possíveis, isto é, quando $A = B = 9$. Assim, o maior valor possível será:

$$AB + BA = 99 + 99 = 198$$

b) Mostre que $AB + BA$ é sempre divisível por 11.

Solução:

Observe que podemos escrever:

$$AB + BA = 10A + B + 10B + A = 11(A + B)$$

De modo que essa soma será divisível por 11.

c) Sejam A, B e C algarismos não nulos. Considere a soma $S = AA + AB + AC + \cdots + CC$, que é a soma de todos os números de dois algarismos formados pelos algarismos A, B e C. Demonstre que S é sempre divisível por 3.

Solução:

Escrevendo a soma com todas as suas parcelas, percebe-se:

$S = AA + AB + AC + BA + BB + BC + CA + CB + CC \Rightarrow$

$S = 10A + A + 10A + B + 10A + C + 10B + A + 10B + B + 10B + C + 10C + A + 10C + B + 10C + C \Rightarrow$

$S = 10A + 10A + 10A + 10B + 10B + 10B + 10C + 10C + 10C + A + A + A + B + B + B + C + C + C \Rightarrow$

$S = 30A + 30B + 30C + 3A + 3B + 3C \Rightarrow$

$S = 3(10A + 10B + 10C + A + B + C)$.

Portanto S é divisível por 3.

d) Considere os casos onde $AB + BA$ resulta sempre em um número de três algarismos XYZ, isto é, se $A + B > 9$. Mostre que $Y = X + Z$.

Solução 1:

Considerando os casos em que $A + B > 9$, isto é, se $A + B$ é um número de dois algarismos, podemos escrever $A + B = 10C + D$ para alguns valores de C e D.

Como $AB + BA = 11(A + B) = XYZ$, temos:

$11(A + B) = 11(10C + D) = 110C + 11D = 100C + 10C + 10D + D = 100C + 10(C + D) + D$.

Ou seja,

$100C + 10(C + D) + D = 100X + 10Y + Z$,

Portanto, $X = C$, $Z = D$ e $Y = C + D$.

Assim, concluímos que $Y = X + Z$.

Solução 2:

Perceba que $A + B > 9$, implica que $A + B = 10 + P$, ou seja, é um número de 2 algarismos. Como $AB + BA = 11(A + B) = 100X + 10Y + Z$, XYZ é um produto de 11 e $(A + B) = 10 + p$, ou seja, se temos:

$$\begin{array}{r} 1P \\ \times \quad 11 \\ \hline 1P \\ 1P \\ \hline 1(1+P)P \end{array}$$

Assim:

$XYZ = 100 \cdot 1 + 10 \cdot (1 + P) + P = 100X + 10Y + Z$, o que torna Y = 1 + P = X + Z, como queríamos demonstrar.

Solução 3:

Sabendo que $A + B > 9$, podemos garantir que $A + B$ é no mínimo 10 e que podemos escrever $A + B$ como $10 + R$, em que $0 \leq R \leq 8$ (já que a maior soma possível é $9 + 9 = 18$, em que $R = 8$). Seguindo a lógica acima, podemos escrever a seguintes soma:

$$\begin{array}{r} 1 \\ AB \\ + \quad BA \\ \hline * \;\; R \end{array}$$

Na soma acima, temos B + A = 10 + R, ficando R nas unidades e subindo 1 para as dezenas. Na posição das dezenas da soma o * equivale novamente a 10 + R, somando 1 que veio das unidades temos: 10 + R + 1. Como R + 1 é o que excede 10, sabendo que R + 1 < 10, pois R é no máximo 8, concluímos que R + 1 representa o algarismo das dezenas e o 10 passa como 1 para as centenas.

Assim ficamos com um número XYZ tal que X = 1, Y = R + 1 e Z = R, portanto Y = R + 1 ⇒ Y = X + Z.

Problema 4

Prende-se as duas extremidades de uma corda de 8 m de comprimento nos pontos A e B (figura 1) de uma tábua cuja distância de A até B é igual a 4 m.

A fim de esticar a corda, pretende-se fixar uma haste perpendicular à tábua a uma distância x do ponto A (figura 2).

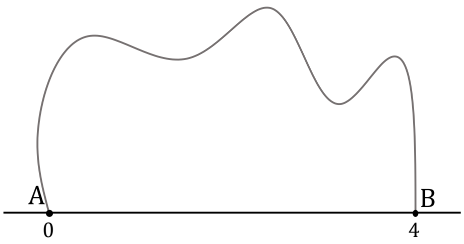


figura 1

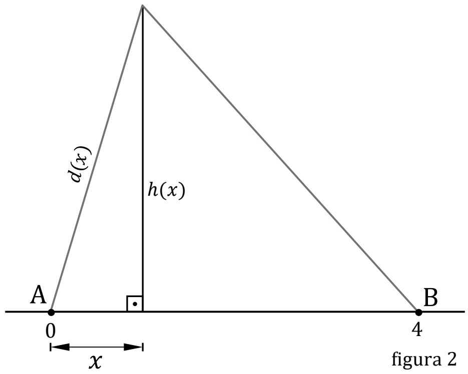


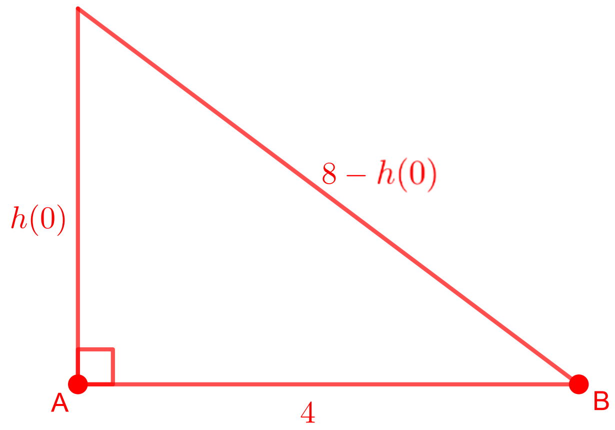
figura 2

Em termos de x, ou seja, em função de x, seja $h(x)$ a altura da haste no instante em que o pé da haste se encontra a uma distância x do ponto A, e $d(x)$ a medida que a corda esticada faz do ponto A até o topo da haste (figura 2). Calcule,

a) $h(0)$, ou seja, a altura da haste quando fixada no ponto A (observe que até o topo da haste, estão juntas a corda e a haste a partir de A).

Solução:

Para calcular $h(0)$, observe que, neste caso, forma-se um triângulo retângulo com catetos $h(0)$ e 4, e hipotenusa $8 - h(0)$, conforme ilustrado na figura abaixo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$\left(8 - h(0)\right)^2 = 4^2 + (h(0))^2$

Desenvolvendo a expressão, obtemos:

$64 - 16h(0) + (h(0))^2 = 16 + (h(0))^2$

Subtraindo $(h(0))^2$ de ambos os lados, ficamos com:

$64 - 16h(0) = 16$

Isolando $h(0)$, temos:

$16h(0) = 48 \Leftrightarrow$

$h(0) = \frac{48}{16} = 3$

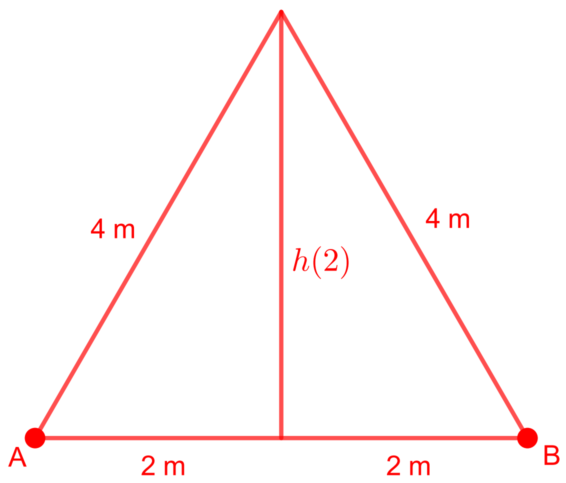
Portanto, a altura da haste quando fixada no ponto A é $h(0) = 3$ metros.

b) $h(2)$ e $h(4)$.

Solução

Inicialmente, pela simetria do problema, temos que $h(4) = h(0) = 3$.

Para calcular $h(2)$, consideramos o triângulo retângulo formado com um dos catetos sendo a distância da haste ao ponto A, que é 2 m, e a hipotenusa sendo a parte da corda que vai do ponto A ao topo da haste, conforme ilustrado na figura:



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$4^2 = 2^2 + (h(2))^2$$

Desenvolvendo a expressão, obtemos:

$$16 = 4 + (h(2))^2$$

Isolando $h(2)$, temos:

$$16 - 4 = (h(2))^2 \Leftrightarrow 12 = (h(2))^2 \Leftrightarrow h(2) = \sqrt{12} \Leftrightarrow h(2) = 2\sqrt{3}$$

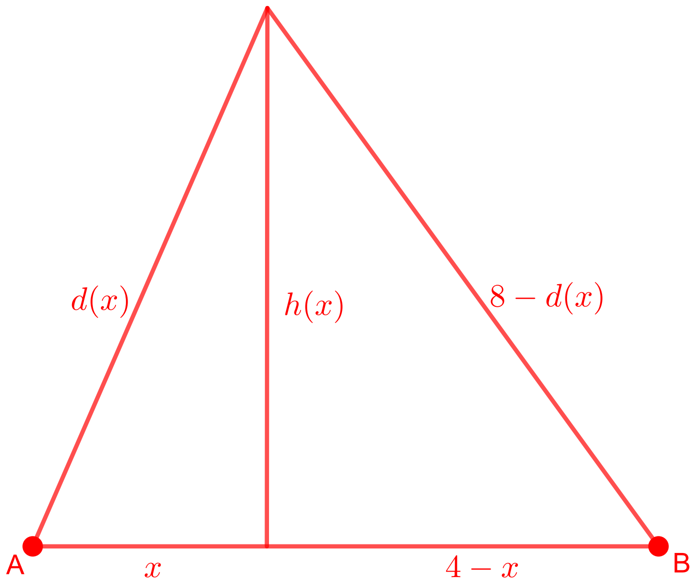
Portanto, as alturas da haste são:

$h(4) = 3$ metros

$h(2) = 2\sqrt{3}$ metros

c) $d(x)$, ou seja, o comprimento da corda do ponto A ao topo da haste em função de x (considere $0 \leq x \leq 4$).

Usando o Teorema de Pitágoras nos dois triângulos retângulos na figura abaixo, obtemos:



$\left(d(x)\right)^2 - x^2 = \left(h(x)\right)^2 = \left(8 - d(x)\right)^2 - (4-x)^2 \Leftrightarrow$

$\left(d(x)\right)^2 - x^2 = 64 - 16d(x) + \left(d(x)\right)^2 - 16 + 8x - x^2 \Leftrightarrow$

$16d(x) = 48 + 8x \Leftrightarrow$

$$d(x) = \frac{48 + 8x}{16}$$

Portanto, temos: $d(x) = 3 + \frac{x}{2}$.

d) x, $(0 \leq x \leq 4)$, para o qual a haste tem altura máxima.

Note que encontrar o valor $0 \leq x \leq 4$ para que a haste tem altura $h(x)$ máxima, equivale a encontrar o valor de $0 \leq x \leq 4$ para o qual $(h(x))^2$ é máxima. Pelo item c) temos:

$\left(h(x)\right)^2 = \left(d(x)\right)^2 - x^2 \Leftrightarrow$

$$\left(h(x)\right)^2 = \left(3 + \frac{x}{2}\right)^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(h(x)\right)^2 = 9 + \frac{6x}{2} + \frac{x^2}{4} - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(h(x)\right)^2 = -\frac{3x^2}{4} + 3x + 9$$

Como a função $\left(h(x)\right)^2$ é uma função quadrática em x, temos que o valor máximo é atingido no instante em que x é a abscissa do vértice da parábola, ou seja,

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-3}{-\frac{6}{4}} = \frac{12}{6} = 2.$$