SEDUC OLÍMPICA

TME²

2º TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

1ª Fase

Ensino Médio

GABARITO OFICIAL E RESOLUÇÃO COMENTADA

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ
AQUI TEM TRABALHO. AQUI TEM FUTURO.

Problema 01 (E)

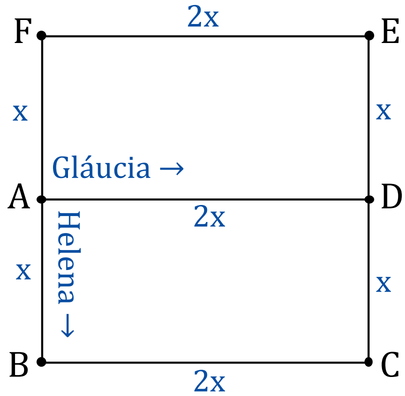
É fácil perceber que $2x + 6 = 2(x + 3) = 2 \cdot 11 = 22$.

Problema 02 (A)

É fácil perceber que a medida do lado do quadrado ABCD é igual à soma das medidas do lado do quadrado branco com os lados congruentes dos 2 triângulos isósceles, todos iguais a 2 cm. Logo o lado do quadrado ABCD mede $3 \cdot 2\ cm = 6\ cm$ e á área do quadrado ABCD é dada por $(6\ cm)^2 = 36\ cm^2$.

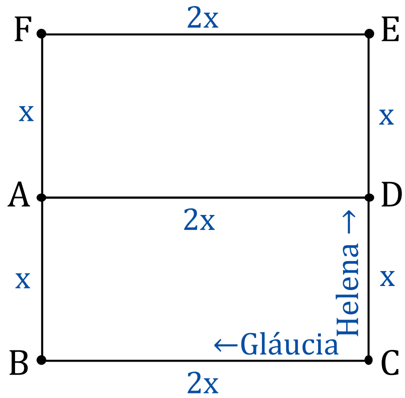
Problema 03 (E)

Consideremos 2x como medida para o lado do quadrado, assim temos:



Pelo enunciado Helena e Gláucia partem juntas do ponto A pela primeira vez seguindo percursos distintos na trilha quadrada.

Observe que Helena segue o caminho ABCDEFA, percorrendo uma distância 8x a cada ciclo, enquanto Gláucia segue o caminho ADCBA, percorrendo uma distância de 6x a cada ciclo. O primeiro encontro de Gláucia e Helena ocorre, após ambas percorrerem uma distância de 3x, o que acontece no vértice C.



Partindo do vértice, ao percorrerem uma distância de 6x, Helena estará no vértice B e Gláucia novamente no vértice C, sem que haja encontro neste percurso.

Portanto, ao percorrem uma distância de x, Helena e Gláucia se encontram pela segunda vez no ponto médio de BC.

Problema 04 (B)

1,5 L de refrigerante é o mesmo que 3/2 de litro. Assim, havia $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ de litro de refrigerante na garrafa.

Uma outra forma de resolver sugere achar metade de 3/2, ou seja, $\frac{3}{2} \div 2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Problema 05 (A)

Ao longo do contorno do numeral 2, contam-se 24 lados de quadradinhos da malha. Se o perímetro desse numeral é igual a 12 cm, a medida do lado de um quadradinho da malha mede $\frac{1}{2}$ cm. Isto é, cada 2 lados de quadradinho equivalem a 1 cm.

As letras T, M e E se apresentam com 32, 72 e 48 lados de quadradinhos no contorno, ou seja, 16 cm, 36 cm e 24 cm de perímetro cada. A soma dos perímetros das três figuras equivale T, M e E é igual a $16 + 36 + 24 = 76$ cm.

Problema 06 (SEM RESPOSTA)

Temos que $3^2 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$.

Item A não é solução, pois $2(3 + \sqrt{3}) + 2(3 - \sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} = 12$.

Item B não é solução, pois $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$.

Item C não é solução, pois $\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$.

Item D não é solução, pois não existe o triângulo com as dimensões citadas.

Item E não é solução, pois o cateto mede $\sqrt{6}$.

ATENÇÃO: A questão está anulada e cada participante receberá a sua pontuação.

Problema 07 (A)

Ora, dada a expressão $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ e as condições $a^2 + b^2 = 1$ e $ab = \frac{1}{2}$, teremos que $a^4 + b^4 = 1^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Problema 08 (B)

A primeira regra estabelece que quem prefere romances não gosta de livros de mistério, o que significa que Laura, preferindo romances, não gosta de mistérios. No entanto, a regra não exclui a possibilidade de ela gostar ou não de poesia, pois só diz que quem gosta de poesia também gosta de romances, não o contrário.

A segunda regra indica que aqueles que gostam de poesia sempre apreciam romances, mas isso não se aplica inversamente; portanto, não podemos afirmar automaticamente que Laura gosta de poesia, apenas porque ela gosta de romances.

Como João detesta poesia, e sabemos que quem gosta de poesia gosta de romances, isso não nos diz diretamente sobre suas preferências por romances ou mistérios. Sua aversão à poesia não influencia diretamente sua opinião sobre romances ou mistérios, dadas as regras apresentadas.

Ninguém no clube gosta dos três gêneros, o que é consistente com as preferências deduzidas, mas não afeta diretamente a resposta à questão específica sobre Laura e João.

Problema 09 (C)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(x+5)^2 + x^2 = 25^2 \Rightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 300 = 0 \Rightarrow x = -20 \text{ ou } x = 15.$$

Como x não pode ser negativo, descartamos -20 e novamente pelo Teorema de Pitágoras, agora no triângulo ABD, podemos calcular o valor da medida do lado AD:

$$(AD)^2 = (15+5)^2 + (15 + (15-9))^2 \Rightarrow (AD)^2 = 400 + 441 \Rightarrow AD = \sqrt{841} \Rightarrow AD = 29\ cm.$$

Problema 10 (D)

Para resolver essa questão, temos que pensar na pior das situações onde os 10 primeiros alunos retiram 10 bolinhas com números diferentes e os próximos 10 alunos retiram também 10 bolinhas com números diferentes. Assim teremos 10 duplas de alunos com números iguais, totalizando 20 alunos. É garantido que o próximo aluno a retirar uma bolinha fará um trio com uma das duplas. Assim, a quantidade mínima de alunos para realizar essa dinâmica deve ser 21 alunos.

Problema 11 (C)

Vamos analisar as possibilidades a partir da pintura da mesorregião localizada na parte de baixo do mapa até a mesorregião de cima, classificando-as como A, B, C e D, respectivamente. Os alunos podem pintar a mesorregião A com qualquer uma das quatro cores possíveis. Feito isso, podem pintar a mesorregião B com qualquer uma das três cores restantes. Como a mesorregião C faz divisa com as mesorregiões A e B, podem pintá-la com apenas duas cores diferentes (não pode ter as mesmas cores de A e B). Por fim, podem pintar a mesorregião D com três das quatro cores disponíveis (não pode ter a mesma cor de C, pois faz divisa com a mesma). Portanto, pelo PFC, os alunos podem pintar o mapa de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ maneiras diferentes.

Problema 12 (B)

Como os dois segmentos de reta são paralelos, temos pelo Teorema de Tales a seguinte proporção:

$$\frac{x}{1} = \frac{E-x}{y-1} \Leftrightarrow E - x = xy - x$$

Portanto,

$E = xy$.

Problema 13 (C)

Como n é par, então tomemos $n = 2k_1$, com $k_1 \in \mathbb{N}$. Como m é ímpar, então tomemos $m = 2k_2 + 1$, com $k_2 \in \mathbb{N}$.

Para I temos $3(2k_1) + 2k_2 + 1 = 6k_1 + 2k_2 + 1 = 2(3k_1 + k_2) + 1 = 2k_3 + 1$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo I é ímpar.

Para II temos $(2k_1)^2 + (2k_2+1)^2 = 4k_1^2 + 4k_2^2 + 4k_2 + 1 = 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_2) + 1 = 2k_3 + 1$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo I é ímpar.

Para III temos $(2k_1)^2 + 2(2k_2+1) = \ 4k_1^2 + 4k_2 + 2 = 2(2k_1^2 + 2k_2 + 1) = 2k_3$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo III é par.

Para IV temos $(2k_2+1)^2 + 2(2k_1) = 4k_2^2 + 4k_2 + 1 + 4k_1 = 2(2k_2^2 + 2k_2 + 2k_1) + 1 = 2k_3 + 1$, com $k_3 \in \mathbb{N}$. Logo I é ímpar.

Portanto apenas III representa um número par.

Problema 14 (D)

Definimos a velocidade média (Vm) de um objeto como da razão entre a distância percorrida (d) e o tempo gasto (t). Neste caso, $t = \frac{d}{Vm}$ e $d = Vm \cdot t$.

No problema,

$d = 90 + 90 = 180$ e $t = \frac{90}{30} + \frac{90}{45} = 5$. Logo, $Vm = \frac{180}{5} = 36\ km/h$.

Problema 15 (D)

Para que os lados x, y e 3 formem um triângulo, eles devem satisfazer as seguintes desigualdades triangulares:

$x + y > 3$, $x + 3 > y$ e $y + 3 > x$.

Isto é equivalente a:

$x + y > 3$ e $|x - y| < 3$.

Os pares que satisfazem essas condições são:

(1,3),

(2,2), (2,3), (2,4),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,4)

(4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,3), (5,4), (5,5), (5,6)

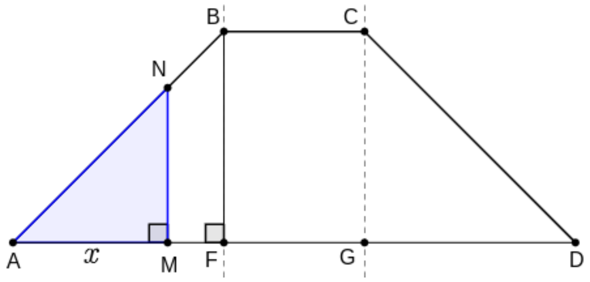
(6,4), (6,5), (6,6).

Portanto, existem 21 combinações possíveis para os pares (x, y).

Problema 16 (B)

Sejam F e G as projeções dos pontos B e C, respectivamente, sobre a base maior AD. Temos três possibilidades a considerar, sobre a localização do ponto M:

1. M pertence ao segmento AF:



Neste caso, o triângulo AMN é retângulo em M e é semelhante ao triângulo AFB pelo caso AA. Assim,

$$\frac{AM}{AF} = \frac{MN}{BF} \Leftrightarrow \frac{x}{AF} = \frac{MN}{BF} \Leftrightarrow MN = \frac{BF \cdot x}{AF}.$$

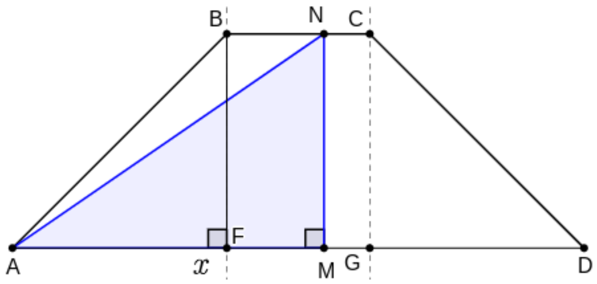
Sendo assim, a área do triângulo AMN, R(x), é dada por:

$$R(x) = \frac{AM \cdot MN}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{x \cdot \frac{BF \cdot x}{AF}}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{BF \cdot x^2}{2 \cdot AF}.$$

A função $R(x) = \frac{BF \cdot x^2}{2 \cdot AF}$ tem seu vértice no ponto (0,0) e concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Como à medida que M percorre o segmento AF no sentido crescente, a altura do triângulo fica cada vez maior, podemos concluir que a área do triângulo AMN, neste intervalo, tem seus valores pertencentes ao ramo crescente da referida função, isto é, ramo crescente de uma parábola de concavidade voltada para cima.

2. M pertence ao segmento FG:

Neste caso, a altura do triângulo AMN permanece constante, pois o ponto N percorre o segmento BC, que é paralelo ao segmento AD. Logo, a área do triângulo AMN é dada por $R(x) = \frac{AM \cdot AN}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{MN \cdot x}{2}$.

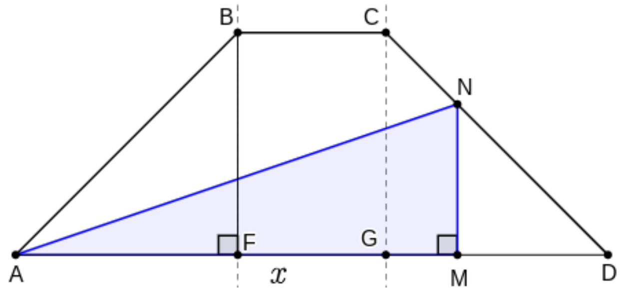


Observe que $R(x) = \frac{MN \cdot x}{2}$ representa uma função afim crescente, pois seu coeficiente angular (coeficiente de x) é positivo.

3. M pertence ao segmento GD:

Neste caso, para determinarmos o valor de MN vamos usar a semelhança, pelo caso AA, entre os triângulos CGD e NMD. Vejamos:

$$\frac{CG}{MN} = \frac{GD}{MD} \Leftrightarrow \frac{CG}{MN} = \frac{GD}{AD-x} \Leftrightarrow MN = \frac{CG \cdot (AD-x)}{GD}.$$



Logo, a área R(x) é dada por:

$$R(x) = \frac{AM \cdot MN}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{x \cdot \frac{CG(AD-x)}{GD}}{2} \Leftrightarrow R(x) = \frac{x \cdot CG \cdot (AD-x)}{2GD} \Leftrightarrow R(x) = \frac{AD \cdot CG \cdot x}{2GD} - \frac{CG \cdot x^2}{2GD}.$$

Neste caso, temos uma função quadrática de concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Note que, conforme M percorre o segmento GD no sentido crescente, a altura do triângulo fica cada vez menor, indicando que a área do triângulo AMN, neste intervalo, tem seus valores pertencentes ao ramo decrescente da referida função, isto é, ramo decrescente de uma parábola de concavidade voltada para baixo.

Conclusão: no primeiro intervalo, temos parte do ramo crescente de uma parábola de concavidade voltada para cima. No segundo intervalo, temos parte do gráfico de uma função crescente e no terceiro intervalo, temos parte do ramo decrescente de uma parábola de concavidade voltada para baixo. Finalmente, o gráfico que melhor representa o gráfico da área do triângulo AMN, no intervalo completo, é o apresentado na alternativa B).

Problema 17 (E)

Ana e Bruno realizam experimentos independentes, onde Ana pode obter 6 possíveis resultados distintos, e Bruno, 8 possíveis resultados. Isso resulta em um total de $6 \times 8 = 48$ combinações diferentes de pares ordenados, em que o primeiro elemento do par representa o resultado de Ana, e o segundo, o resultado de Bruno.

Ana ganha o jogo sempre que obtém resultados iguais a 2, 3, 4, 5 e 6 e Bruno, nessa ordem, {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4} e {1, 2, 3, 4, 5}. Portanto, Ana ganha em $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ das 48 possibilidades de resultados possíveis. Logo, com probabilidade igual a $\frac{15}{48} = \frac{5}{16}$.

Problema 18 (C)

Tomemos os algarismos a, b, c, d, e, f como indicados na tabela.

a	b	c
d	e	f

Considerando as condições estabelecidas no problema e o valor posicional de cada algarismo, temos:

i) $100a + 10b + c + 100d + 10e + f = 999 \Leftrightarrow 100(a + d) + 10(b + e) + (c + f) = 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 9$. Como o valor máximo de $a + d$, $b + e$ e $c + f$, então a única possibilidade é $a + d = 9$, $b + e = 9$ e $c + f = 9$.

ii) $10a + d + 10b + e + 10c + f = 99 \Leftrightarrow 9a + 9b + 9c + (a + d) + (b + e) + (c + f) = 99$

$$\Leftrightarrow 9(a + b + c) + (a + d) + (b + e) + (c + f) = 99.$$

Substituindo i) em ii), temos:

iii) $9(a+b+c)+9+9+9=99 \Leftrightarrow a+b+c=\frac{72}{9} \Leftrightarrow a+b+c=8.$

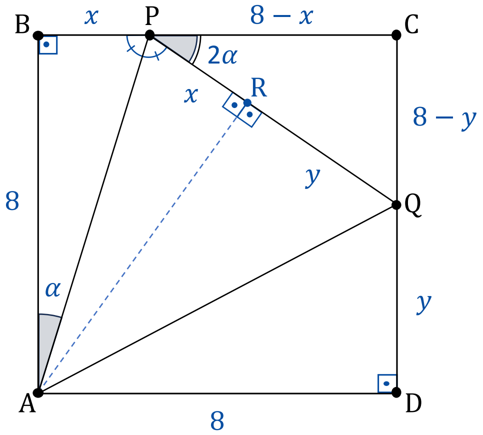
Podemos representar as soluções inteiras não negativas da equação iii) utilizando 8 símbolos ■ para indicar as quantidades e 2 símbolos | para indicar a separação das quantidades correspondentes a cada incógnita. Por exemplo, a sequência ■■■|■■|■■■ representa a solução $a=3, b=2$ e $c=3$, enquanto a sequência ■■■■■|■■■| representa a solução $a=5, b=3$ e $c=0$. Logo, o número de soluções naturais corresponde à quantidade de permutações de 10 elementos em que há 8 repetições do símbolo ■ e 2 repetições do símbolo |, ou seja:

$$P_{10}^{(8,2)}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45.$$

Portanto, existem 45 tabuleiros 2×3 elegantes.

Problema 19 (C)

Observe que: quando traçamos AR perpendicular a PQ, obtemos no triângulo ABP um ângulo P de (90 - α) e, no triângulo APR temos também o ângulo P igual a 90 – α, então temos:



i) ABP ≡ ARP por ALA, e com isso BP = PR = x e PC = 8 – x.

ii) ARQ ≡ ADQ por caso especial ou LLL, e com isso RQ = QD = y e QC = 8 – y.

Daí, o perímetro do triângulo PCQ, será:

= 8 – x + 8 – y + x + y = 16.

Problema 20 (D)

Quando inserimos um algarismo não nulo c após o último dígito de X, formamos o número $10X + c$. Por hipótese, c divide $10X + c$, e, portanto, também divide $10X$. Dado que c pode assumir valores de 1 a 9, podemos concluir que a fatoração em primos de 10X deve incluir pelo menos $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$. Considerando que X deve ser o menor possível, temos $10X=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, isto é, $X = 252$.

Portanto, a soma dos dígitos de X é 9.

SEDUC OLÍMPICA

TME²

2º TORNEIO DE MATEMÁTICA
DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

1ª Fase

Ensino Médio

06 de maio de 2024

Dia Nacional da Matemática

NOME COMPLETO DO(A) ALUNO(A)

INSTRUÇÕES:

1. A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos. Você só poderá deixar a sala 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a juntamente com o cartão-resposta preenchido ao aplicador.

2. Não é permitido:
   - usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
   - comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
   - usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

3. Esta prova contém 20 problemas. Os problemas têm pesos diferentes:

Problemas	Pontuação individual	Pontuação total
01 a 05	01	5
06 a 10	03	15
11 a 15	05	25
16 a 20	07	35

4. Cada problema tem cinco alternativas de resposta: A, B, C, D e E. **Apenas uma** das alternativas é correta.

5. **Respostas incorretas, rasuradas ou com múltiplas opções assinaladas sofrerão uma penalidade correspondente à perda de 25% do valor atribuído ao problema. No cálculo da pontuação final, serão considerados tanto os pesos das questões quanto as eventuais penalizações aplicadas.**

6. A fim de evitar pontuações negativas a nota final será acrescida em 20 pontos.

7. A pontuação final máxima da prova, levando em conta os pesos atribuídos às questões corretas e as penalidades por respostas erradas, equivale a 100 pontos.

Boa prova!

APOIO:

FAPEPI
FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DO PIAUÍ

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ
AQUI TEM TRABALHO.
AQUI TEM FUTURO.

Problemas de 01 Ponto

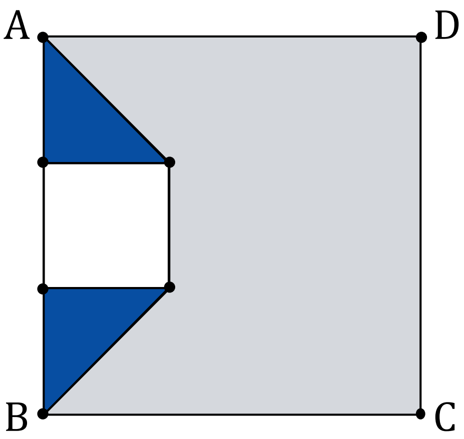
Problema 01

Se $x + 3 = 11$ qual é o valor de $2x + 6$?

- A 12
- B 16
- C 18
- D 20
- E 22

Problema 02

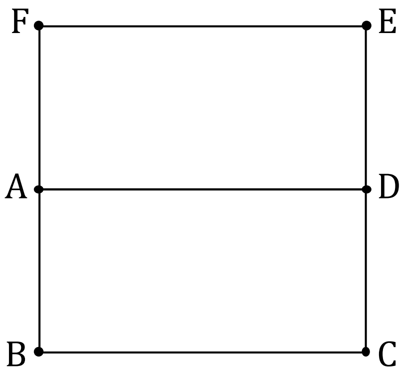
Qual é a área do quadrado ABCD, em que estão destacados um quadrado branco de lado medindo 2 cm e dois triângulos isósceles congruentes?



- A 36 cm²
- B 28 cm²
- C 24 cm²
- D 6 cm²
- E 4 cm²

Problema 03

Duas pessoas, Helena e Gláucia, partem juntas do ponto A em uma trilha quadrada repartida em dois retângulos iguais. Helena segue sempre o caminho ABCDEFA, enquanto Gláucia, que sai em sentido ao vértice D, percorre sempre o caminho ADCBA.



Supondo que elas mantiveram as mesmas velocidades de caminhada, sem contar o momento em que partiram juntas, elas voltaram a se encontrar **pela segunda vez** exatamente

- A no ponto C.
- B no ponto F.
- C entre os pontos E e F.
- D no ponto médio do segmento AD.
- E no ponto médio do segmento BC.

Problema 04

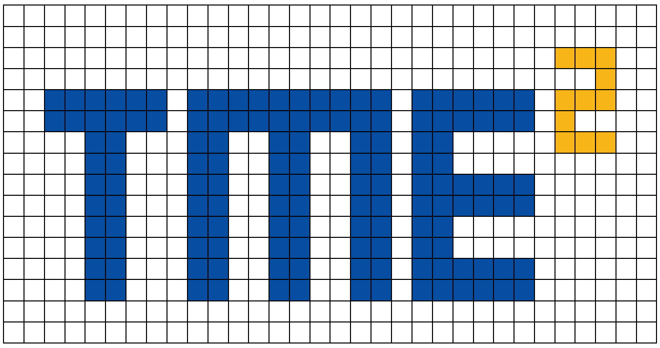
Durante o lanche, os irmãos B1 e B2 compartilharam uma garrafa de refrigerante de 1,5 litro. Após algum tempo, observaram que o volume de refrigerante na garrafa estava pela metade.

Considerando essa observação como correta, qual era a fração de refrigerante restante na garrafa, expresso em litro (L)?

- A $\frac{2}{4}$ L
- B $\frac{3}{4}$ L
- C $\frac{2}{3}$ L
- D 1 L
- E $\frac{5}{4}$ L

Problema 05

Na malha quadriculada abaixo foram desenhadas as letras **T**, **M**, **E** e o numeral **2**.



Sabendo-se que o perímetro do polígono que representa o numeral 2 na figura é igual a 12, a soma dos perímetros das 3 figuras que representam as letras, é

- (A) 76.
- (B) 88.
- (C) 140.
- (D) 152.
- (E) 176.

Problemas de 03 Pontos

Problema 06

Considere a expressão $3^2 - \sqrt{9}$.

O resultado desta operação pode ser interpretado como

- (A) o perímetro do retângulo cujos lados medem $3 + \sqrt{3}$ e $3 - \sqrt{3}$.
- (B) a medida da área do quadrado de lado igual a $3\sqrt{2}$.
- (C) a medida da área da região circular inscrita no quadrado de lado igual a 3.
- (D) a medida do cateto desconhecido em um triângulo retângulo, no qual a hipotenusa mede 3 e o outro cateto também mede 3.
- (E) a medida de um dos catetos do triângulo retângulo, no qual a hipotenusa mede 3 e o outro cateto mede $\sqrt{3}$.

Problema 07

Antônio enfrenta um desafio matemático proposto por sua professora: determinar o valor de $a^4 + b^4$ para números reais a e b que obedecem às condições $a^2 + b^2 = 1$ e $ab = \frac{1}{2}$. Ele recorda uma lição sobre produtos notáveis, que indica que a expressão:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2.$$

Com base nessas informações, qual será o resultado da expressão?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{3}{2}$
- (C) $\frac{3}{4}$
- (D) $\frac{5}{4}$
- (E) $\frac{17}{16}$

Problema 08

No Clube do Livro da Escola Malba Tahan, descobre-se que:

I) Quem prefere romances não gosta de livros de mistério.

II) Aqueles que gostam de poesia sempre apreciam romances, mas nem todos que gostam de romances apreciam poesia.

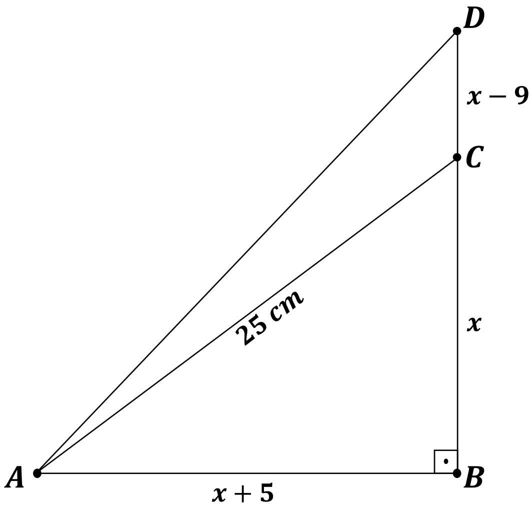
III) Ninguém no clube gosta de todos os três gêneros: romances, mistérios e poesia.

Com base nessas informações, se Laura prefere romances, e João detesta poesia, o que podemos dizer sobre as preferências deles?

- (A) Laura gosta de romances e mistérios, mas não de poesia; João gosta apenas de mistérios.
- (B) Laura gosta de romances; João não gosta de poesia e não é possível determinar suas outras preferências.
- (C) Laura gosta de romances e poesia, mas não de mistérios; João gosta de romances, mas não de poesia nem de mistérios.
- (D) Laura gosta de romances, mas não de mistérios; João gosta de mistérios, mas não de romances nem de poesia.
- (E) Laura gosta de poesia e romances; João gosta de mistérios e romances.

Problema 09

Na figura abaixo, temos os triângulos ABC e ABD retângulos em B.



Considerando que as medidas dos lados AC, AB, BC e CD são, respectivamente, $25\ cm$, $x+5$, x e $x-9$, temos que a medida do lado AD é

A $20\sqrt{2}\ cm$.

B $25\sqrt{2}\ cm$.

C $29\ cm$.

D $29\sqrt{2}\ cm$.

E $31\ cm$.

Problema 10

Para comemorar o Dia Nacional da Matemática, um professor planeja realizar uma dinâmica com seus alunos. Ele irá levar uma urna com 10 bolinhas numeradas de 01 a 10. Cada aluno irá retirar uma única bolinha, mostrar o seu número e devolver a bolinha para a urna. Os primeiros 3 alunos que retirarem o mesmo número, ganharão um prêmio.

A quantidade mínima de alunos para realizar essa dinâmica, de modo que se garanta 3 alunos retirando o mesmo número é

A 3.

B 13.

C 20.

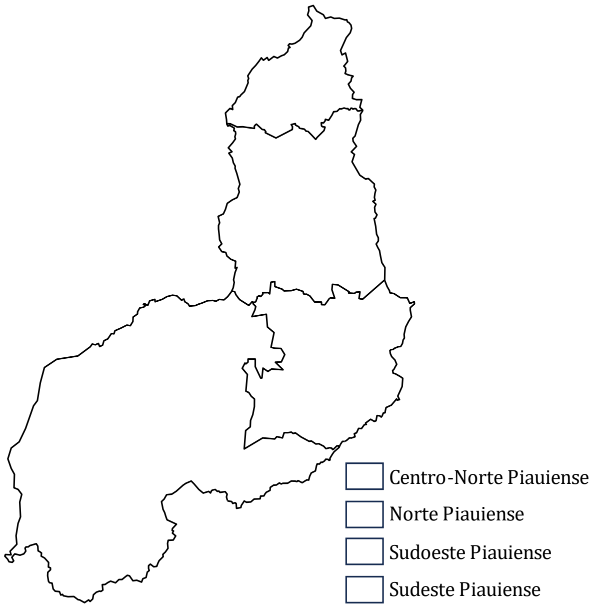
D 21.

E 30.

Problemas de 05 Pontos

Problema 11

Ana Carla desafiou seus alunos a colorir o mapa das mesorregiões do Piauí utilizando as cores azul, amarela, laranja e verde, de tal forma que regiões adjacentes não compartilhassem a mesma cor.



De quantas maneiras diferentes os alunos podem pintar esse mapa?

A 256

B 144

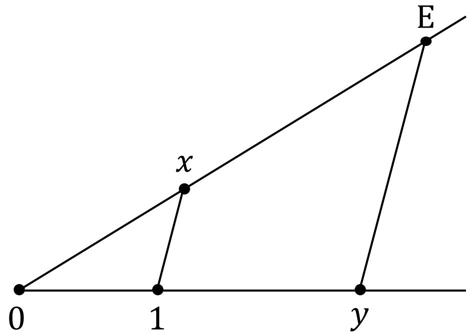
C 72

D 24

E 16

Problema 12

A figura ilustra a interpretação geométrica de uma operação matemática fundamental envolvendo números reais. Essa construção geométrica origina-se do ponto de intersecção de duas semirretas, que compartilham a mesma origem, com dois segmentos de reta paralelos entre si. Neste contexto específico, consideramos x e y como números reais positivos.



A operação mencionada no texto acima

- **A** se refere à soma, sendo $E = x + y$.
- **B** se refere ao produto, sendo $E = xy$.
- **C** se refere à subtração, sendo $E = x - y$.
- **D** se refere à divisão, sendo $E = x \div y$.
- **E** se refere à raiz quadrada, sendo $E = \sqrt{xy}$.

Problema 13

Sendo n um número natural par e m um número natural ímpar, observe as expressões abaixo:

I. $3n + m$
II. $n^2 + m^2$
III. $n^2 + 2m$
IV. $m^2 + 2n$

Sobre essas expressões podemos afirmar que

- **A** apenas I e IV representam números ímpares.
- **B** apenas I representa um número ímpar.
- **C** apenas III representa um número par.
- **D** apenas IV representa um número par.
- **E** todas representam números ímpares.

Problema 14

Um ciclista viaja de uma cidade A para uma cidade B, uma distância de 90 km, com uma velocidade média de 30 km/h. Na volta, devido ao vento a favor, sua velocidade média aumenta para 45 km/h.

Desprezando o tempo de parada na cidade B, qual é a velocidade média do ciclista para o percurso total de ida e volta?

- **A** 40,0 km/h
- **B** 38,0 km/h
- **C** 37,5 km/h
- **D** 36,0 km/h
- **E** 34,5 km/h

Problema 15

Você tem dois dados convencionais, um azul e outro verde. Quando você lança esses dados, cada um mostra um resultado que varia de 1 a 6, formando um par ordenado (x, y) que representa os resultados desses dois lançamentos.

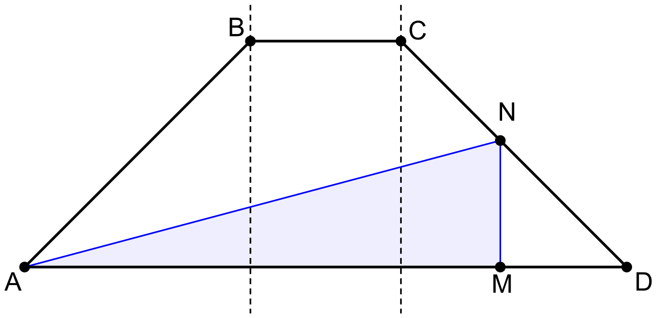
Quantas combinações possíveis de resultados dos lançamentos, juntando-se ao número 3, representam as medidas dos lados de um triângulo?

- **A** 8
- **B** 13
- **C** 16
- **D** 21
- **E** 36

Problemas de 07 Pontos

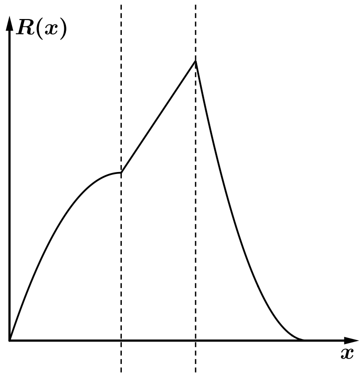
Problema 16

No trapézio ABCD, os pontos M e N movem-se a partir do ponto A, respectivamente sobre o segmento AD e sobre a linha poligonal ABCD, de modo que o segmento MN permaneça perpendicular às bases do trapézio.

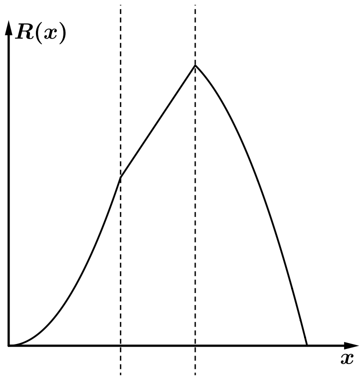


Qual é o gráfico que melhor representa a área R(x) do triângulo AMN em função da distância x do ponto M ao ponto A?

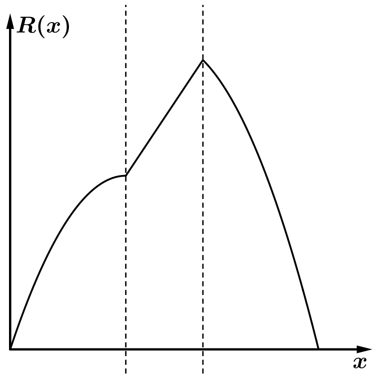
A



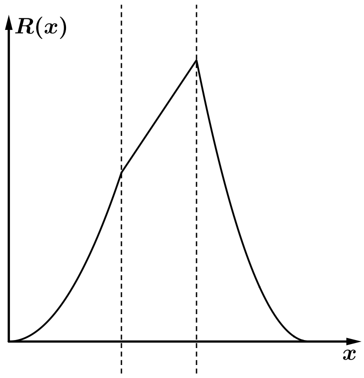
B



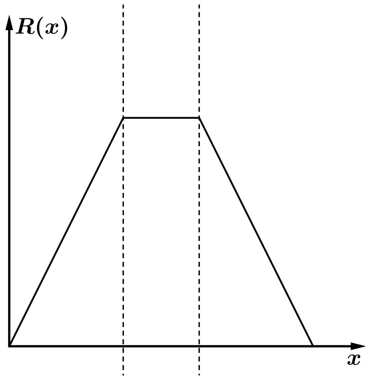
C



D



E



Problema 17

Em um jogo entre dois jogadores, Ana e Bruno, cada um escolhe um dado para jogar. Ana escolhe um dado de 6 lados, numerados de 1 a 6. Bruno, por outro lado, escolhe um dado especial de 8 lados, numerado de 1 a 8. Eles concordam que o vencedor da rodada é quem tirar o número mais alto no lançamento do dado. Em caso de empate, a rodada é considerada um empate.

Qual é a probabilidade de Ana vencer uma rodada, considerando que ambos lançam seus dados uma vez?

- **A** $\frac{1}{2}$
- **B** $\frac{5}{8}$
- **C** $\frac{5}{18}$
- **D** $\frac{1}{4}$
- **E** $\frac{5}{16}$

Problema 18

Dizemos que um tabuleiro 2 x 3 é elegante se for possível colocar um dígito (de 0 a 9) em cada uma de suas casas de modo que:

- Ao ler os dígitos na direção horizontal, da esquerda para a direita, a soma dos dois números formados é igual a 999.
- Ao ler os dígitos na direção vertical de cima para baixo, os três números formados somam 99.

Por exemplo, o tabuleiro abaixo é elegante, pois $8 + 991 = 999$ e $9 + 9 + 81 = 99$.

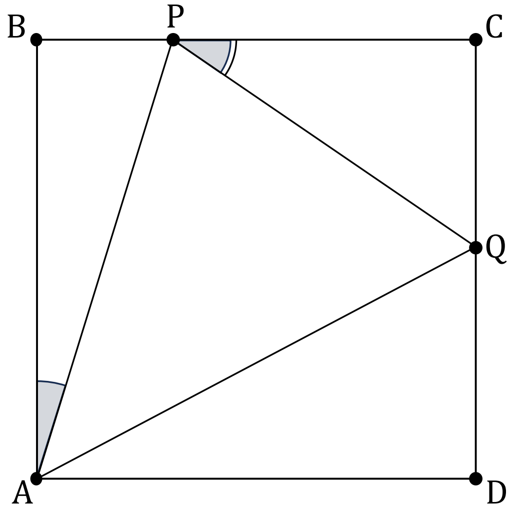
0	0	8
9	9	1

Quantos tabuleiros 2×3 elegantes existem?

(A) 32
(B) 36
(C) 45
(D) 72
(E) 90

Problema 19

Considere a figura plana dada, na qual ABCD representa um quadrado. Nesta figura, os pontos P e Q são localizados nos lados BC e CD, respectivamente. É dado que o ângulo QPC é o dobro do ângulo BAP.



Sabendo que o lado do quadrado tem comprimento de 8 unidades, determine o perímetro do triângulo PCQ.

(A) 4
(B) 8
(C) 16
(D) 24
(E) 32

Problema 20

Seja X o menor número natural com a propriedade de que, ao inserir qualquer algarismo não nulo c após o último algarismo de X (ou seja, à direita de X), o número resultante é sempre divisível por c.

Qual é a soma dos algarismos de X?

(A) 15
(B) 14
(C) 12
(D) 9
(E) 6